Roulette met Riemann

Het meest nagejaagde mysterie uit de wiskunde is nog steeds niet opgelost: hoe toevallig zijn de priemgetallen verdeeld?

6/7

ILLUSTRATIE ROLAND BLOKHUIZEN

W wetenschap

2/3
Milieu
De strijd tussen trein en vliegtuig

9
Karel Knip
Onzichtbaar in infrarood

10/11
NWO premies
4 x Spinoza en 2 x Stevin

nrc
ZATERDAG 16 JUNI & ZONDAG 17 JUNI 2018

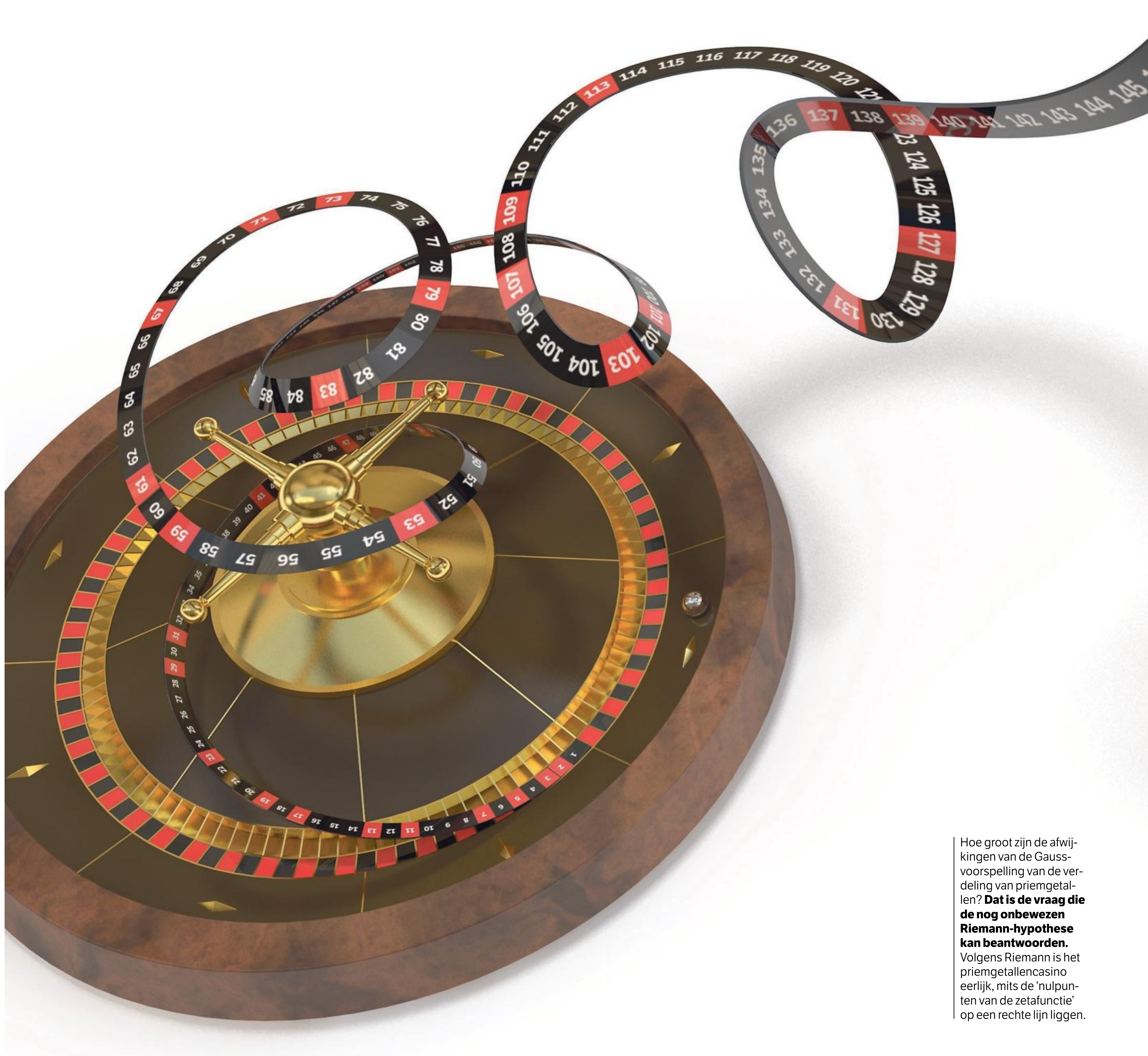
Wetenschap W7

WISKUNDE

Hoe **toevallig** is de verdeling van priemgetallen?

Het grootste en belangrijkste onopgeloste raadsel uit de wiskunde is de Riemannhypothese. Dit idee over de verdeling van priemgetallen is een spil in vele gebieden: van die van quantummechanica tot het kaartspel Patience. Vorige week braken op een speciaal congres tweehonderd wiskundigen zich er het hoofd over.

Door onze medewerker **Alex van den Brandhof**
Illustratie **Roland Blokhuizen**



Hoe groot zijn de afwijkingen van de Gauss-voorspelling van de verdeling van priemgetallen? **Dat is de vraag die de nog onbewezen Riemann-hypothese kan beantwoorden.** Volgens Riemann is het priemgetallencasino eerlijk, mits de 'nulpunten van de zetafunctie' op een rechte lijn liggen.

Een Ferrari zou de Italiaanse wiskundige Enrico Bombieri van zijn vader krijgen als hij ooit de Riemannhypothese zou kunnen bewijzen. Bombieri is inmiddels 77 jaar oud, en die Ferrari heeft hij nooit gekregen. De Riemannhypothese is al in 1859 geformuleerd door de Duitser Bernhard Riemann in een artikel over de vraag hoe de priemgetallen tussen de overige getallen liggen verdeeld en het probleem is nog altijd onopgelost. Het is het meest nagejaagde mysterie van de wiskunde.

Riemann knoopte de theorie van priemgetallen en de theorie van 'complexe functies' - een sleutelbegrip is de 'zetafunctie' - aan elkaar. Maar de wegen waarvan onderzoekers hopen dat zijn hypothese tot een oplossing leiden, komen lang niet allemaal uit de getaltheorie en de complexe-functietheorie. Riemanns vermoeden is een spil in een web van deelgebieden van de wiskunde, van quantummechanica tot stochastische matrixtheorie en van de wiskunde van het kaartspel Patience tot die van hyperbolische biljarttafels.

Schoonheid van de wiskunde

Sinds 2000 is de oplossing een miljoen dollar waard, een bedrag waar je een aardige Ferrari van kunt kopen. Bombieri rijdt graag in snelle wagens, maar dat prijzengeld is voor hem geen drijfveer om zich met de Riemannhypothese bezig te houden. Net als veel van zijn collega's is het hem puur om de schoonheid van het vak te doen. „Ik houd gewoon van wiskunde en de bijbehorende wereld van waarheid", mailt hij vanuit Princeton, waar hij verbonden is aan het Institute for Advanced Study. Vorige week was de Italiaan een van de sprekers bij een vierdaagse conferentie in Bristol, de eerste sinds 2002 die geheel aan de Riemannhypothese was gewijd.

In de afgelopen anderhalve eeuw zijn Bombieri en heel wat andere scherpe geesten gestrand bij hun pogingen de 'Mount Riemann' te bedwingen. Ook na de conferentie, die door zo'n tweehonderd wiskundigen werd bezocht, was er nog geen bevrijdend antwoord. Dat had ook niemand verwacht. Bombieri's collega Peter Sarnak, eveneens een autoriteit op dit gebied, zei al voorafgaand aan het congres: „Ik verwacht niet dat we dankzij het congres dichter bij een bewijs van de Riemannhypothese zullen zijn."

Wat was dan het doel van die vierdaagse conferentie? Jon Keating, wiskundige van de universiteit van Bristol en medeorganisator van het congres, licht toe: „Wiskundigen zoeken vanuit verschillende invalshoeken naar bewijzen. Die verschillende benaderingen worden niet altijd goed met elkaar gecommuniceerd. Door ideeën met elkaar uit te wisselen, kunnen weer nieuwe ideeën ontstaan. Dat is vooral belangrijk voor jonge onderzoekers, die vaak niet op de hoogte zijn van alle bewijspogingen uit het verleden."

Eén zo'n poging verscheen vorig jaar in *Physical Review Letters*. Drie theoretisch natuurkundigen presenteerden er een aanpak die gebruik maakt van de verdeling van energieniveaus van een quantumsysteem. Die lijkt sprekend op de verdeling van de 'nulpunten van de zetafunctie', waar het in Riemanns probleem om draait. In diverse populaire media werd dit 'de sleutel tot de oplossing van de Riemannhypothese' genoemd, maar de wiskundigen die in Bristol bijeenkwamen zijn sceptisch. „Dit soort claims zie je wel vaker. Dat artikel geeft heuristische argumenten voor de juistheid van de Riemannhypothese, maar daarvan zijn er veel", zegt Andrew Booker van de universiteit van Bristol. Heuristische argumenten zijn argumenten die iets aannemelijk maken. Belangrijk voor het inzicht, maar onvoldoende voor een streng wiskundig bewijs.

Ook Bombieri is stellig. Hij heeft al vaak claims uit de hoek van de mathematische fysica zien langskomen. „Ik begreep de taal niet, of er was sprake van een evidente wiskundige fout", zegt hij over al die bewijspogingen.

Sarnak krijgt als redacteur van *Annals of Mathematics* zo'n drie manuscripten per week van mensen - beroepswiskundigen en amateurs - die menen het miljoendollarprobleem te hebben opgelost. Die worden allemaal afgewezen. Zelfs gepubliceerde artikelen hebben volgens hem geringe waarde: „Ik heb er geen één gezien met een idee dat op zichzelf voldoende zou kunnen zijn om het probleem te kraken." Het lijkt Sarnak onwaarschijnlijk dat de Riemannhypothese met de bestaande technieken kan worden bewezen. „Ik denk dat er echt nieuwe ideeën voor nodig zijn", zegt hij, eraan toevoegend dat die niet per se ingewikkeld hoeven te zijn. „De meeste dingen zijn niet moeilijk zodra ze eenmaal begrepen zijn, en ik twijfel er niet aan dat dit bij de Riemannhypothese ook het geval zal zijn."

Roulettetafel

Bernhard Riemann formuleerde zijn hypothese in november 1859 in de *Monatsberichte der Berliner Akademie*. Zijn artikel van slechts negen pagina's groeide uit tot een van de belangrijkste in de getaltheorie ooit. De priemgetallen, slechts deelbaar door 1 en zichzelf, zijn de edelstenen van de rekenkunde. Er zijn er oneindig veel van, maar ze worden steeds zeldzamer naarmate de getallen groter worden. Ogenschijnlijk willekeurig liggen ze verspreid tussen de deelbare getallen. Er is geen formule die verraadt wat het eerste priemgetal is dat groter is dan, zeg, 10.000. Het is 10.007, daarna komt 10.009 en dan is er tot 10.037 een priemvacuüm.

Toch voldoen de priemgetallen, ondanks hun onvoorspelbare patroon, aan een zekere wetmatigheid. De Duitser Carl Friedrich Gauss vond aan het eind van de achttiende eeuw een formule - de zogeheten 'logaritmische integraal' - waarmee je ruwweg kunt berekenen hoeveel priemgetallen er tussen 1 en een zeker getal x liggen. Het werkelijke aantal priemgetallen onder de 10.000 is 1.229. De logaritmische integraal van 10.000 is 1.246, een afwijking van 17 naar boven. Het aantal priemgetallen kleiner dan een miljard is 50.847.534, terwijl de logaritmische integraal 50.849.235 geeft, een afwijking van 1.701 naar boven. Relatief is dat een minieme afwijking; het komt neer op zo'n 0,003 procent.

Het lijkt erop dat de logaritmische integraal altijd iets te hoog uitvalt, maar dat is niet zo. Het komt oneindig vaak voor dat Gauss' formule naar beneden toe afwijkt, al is niet bekend wanneer dat voor het eerst gebeurt. Het meest recente resultaat op dit gebied is van de Duitser Jan Büthe (Universität Bonn), die in een artikel dat volgende maand in het tijdschrift *Mathematics of Computation* verschijnt, bewijst dat de kleinste waarde waarvan de logaritmische integraal een onderschatting geeft, in elk geval boven de 10^{19} moet liggen.

Casino-priemgetallen

Gauss' model geeft een goede voorspelling van hoe de priemgetallen onder de gehele getallen verdeeld liggen. Het werk van Riemann gaat over de *afwijking* van die voorspelling ten opzichte van de werkelijkheid.

Je kunt het vergelijken met een casino waar men van elk geheel getal aan een roulettetafel bepaalt of het priem is. Om vast te stellen of een zeker getal x priem is, neemt de croupier een draaiende cilinder waarvan het aantal vakjes gelijk is aan x. Het aantal rode vakjes is gelijk aan de logaritmische integraal van x, de rest van de vakjes is zwart. Belandt het balletje van de croupier in een rood vakje, dan wordt het getal x als priemgetal bestempeld. De kans dat 10.000 als priem wordt gekwalificeerd is 1.246 op 10.000, en de kans dat dat met 1.000.000.000 gebeurt is 50.849.235 op 1000.000.000. Natuurlijk kan geen enkele roulettetafel een getal als 10.000 echt ondeelbaar maken, maar de casino-priemgetallen zullen zich qua verdeling wel net als de echte priemgetallen gedragen.

Als de verdeling van de casino-priemen een beetje afwijkt van wat je op grond van de wetten van de kansrekening mag verwachten, zal niemand daar raar van opkijken. Maar is de afwijking groot, dan zal de croupier ervan worden beticht dat hij niet eerlijk te werk is gegaan en het verloop van het spel heeft gemanipuleerd.

Wat Riemann in 1859 liet zien, komt erop neer dat de croupier eerlijk heeft gehandeld. Met andere woorden: het verschil tussen het werkelijke aantal priemgetallen tot aan x en de Gauss-schatting is niet 'onnatuurlijk' groot. Of, in een formule uitgedrukt: niet groter dan de vierkantswortel uit x.

> Als de Riemannhypothese waar is, zijn priemgetallen niet grillig verdeeld over de getallenlijn

Architect van de zetafunctie

Er is één grote maar. De eerlijkheid van de croupier staat en valt met een eigenschap van de zogeheten 'zetafunctie'. Die eigenschap kon Riemann niet bewijzen en kwam bekend te staan als de Riemannhypothese. Is de hypothese ónwaar, dan kan de afwijking van de Gauss-schatting ten opzichte van de werkelijke priemgetalverdeling veel groter uitvallen. Die zetafunctie is abstract, maar wie verder durft te lezen, vangt een glimp op van het probleem dat al geruime tijd de mathematische hitparade aanvoert.

In de achttiende eeuw rekende de Zwitser Leonhard Euler uit wat je krijgt als je alle 'omgekeerde' tweedemachten bij elkaar optelt. In formulevorm is dat $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \ldots$ De puntjes duiden erop dat die reeks zich tot in het oneindige voortzet. Euler ontdekte dat de uitkomst precies gelijk is aan eenzesde maal het kwadraat van π, het beroemde getal dat de verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel voorstelt. Ook onderzocht Euler wat er gebeurt als je niet 2, maar een ander getal als exponent kiest, bijvoorbeeld 3 of 4.

De uitdrukking $1/1^s + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \ldots$ wordt door wiskundigen de zetafunctie genoemd. Euler toonde een verrassend verband met de priemgetallen aan: vul in de uitdrukking $1/(1 - p^{-s})$ op de plek van p alle priemgetallen in, vermenigvuldig alle waarden die je zo krijgt met elkaar, en het resultaat is precies de zetafunctie.

Meer dan honderd jaar na Euler bestudeerde Riemann de zetafunctie verder. Riemann geldt als de grote architect van die functie, omdat hij de eerste was die haar toepaste op het complexe vlak. Dat betekent dat hij voor de variabele s - de exponent in de zetafunctie - complexe getallen toestond. Complexe getallen bevinden zich niet op een gewone getallenlijn die zich van links naar rechts van min oneindig tot plus oneindig uitstrekt. Bij complexe getallen moet je voor ogen houden dat de wortel uit min één een geldige rekeneenheid is, die wiskundigen met het symbool i noteren. Voorbeelden van complexe getallen zijn 5 + 2i en 17 - 3i.

Complexe getallen kun je tekenen als punten in het complexe vlak, dat in feite niets anders is dan een tweedimensionaal coördinatenstelsel. Het complexe getal 5 + 2i heeft de coördinaten (5, 2). Kies je voor s het getal 5 + 2i, dan is de uitkomst van $1/1^s + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \ldots$ ongeveer gelijk aan 1 - 0,03i. Riemann wilde weten welke complexe getallen je voor s kunt invullen, zodat die uitkomst precies gelijk is aan nul. Zulke getallen, de 'nulpunten van de zetafunctie', bestaan; er zijn er zelfs oneindig veel. Riemann zag in dat juist in de verdeling van de nulpunten veel informatie over de priemgetallen gecodeerd is.

De nulpunten blijken allemaal in een rechte, smalle strook in het complexe vlak te liggen. Dat is bewezen. Het lijkt er zelfs sterk op dat ze allemaal precies op de middenlijn van die strook liggen. Dát is de Riemannhypothese. Als die waar is, sjoemelt de croupier in het Riemann-casino niet en valt het mee met de grilligheid waarmee de priemgetallen tussen de overige getallen verdeeld liggen. Wie de hypothese bewijst, krijgt een ereplaats in het pantheon der grote wiskundigen. En dat is oneindig veel meer waard dan een Ferrari of een miljoen dollar.

Van Alex van den Brandhof verscheen recent het boek *Priemwoestijnen* bij uitgeverij Prometheus.